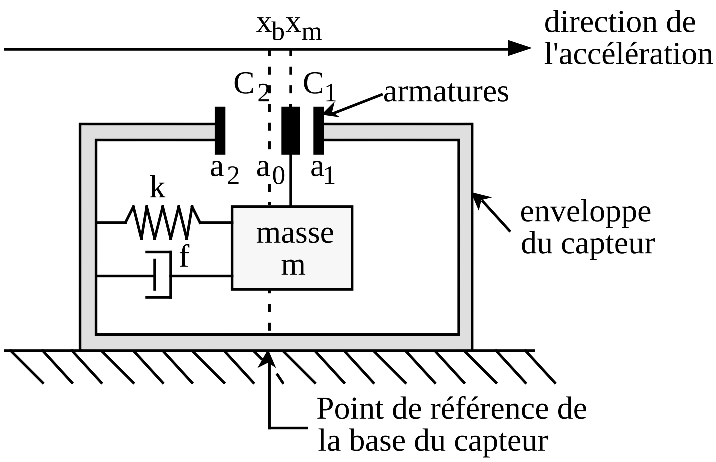
Ce sujet traite de l'étude d'un capteur d'accélération avec son électronique associée, puis de son utilisation dans un asservissement. Les parties A, B et D sont indépendantes, alors que la partie C nécessite les résultats des parties A et B. Il est cependant conseillé de lire la totalité du problème.

Il est demandé une application numérique à chaque fois que cela est possible, mais toujours précédée d'une expression analytique.

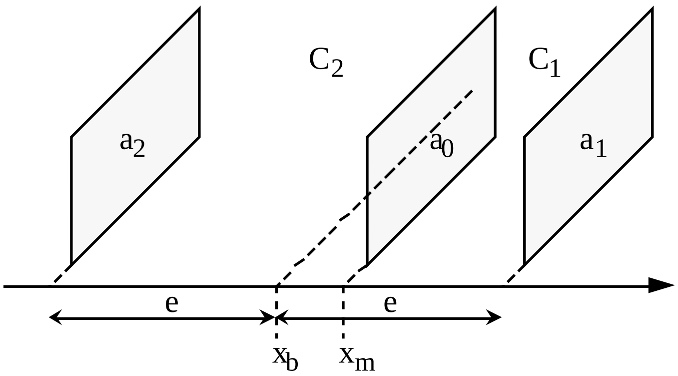
Un capteur d'accélération (ou accéléromètre) est un système fournissant une tension (notée v_m) proportionnelle à l'accélération (notée γ_b) subie par le capteur, ou plus précisément par le mobile sur lequel est fixé solidement le capteur. Ce système est constitué d'une partie mécanique étudiée dans la partie A, et d'un ensemble électronique étudié dans la partie B.

Un modèle mécanique simplifié de ce capteur est le suivant :



Une masse, dite sismique, est reliée à l'enveloppe du capteur par un ressort de coefficient de raideur k, et par un amortisseur de coefficient f (coefficient de frottement visqueux). x_m est la position de cette masse sismique, alors que x_b est la position d'un point de référence de la base du capteur (égale à x_m lorsque le capteur est au repos). On note $x = x_m - x_b$.

Deux condensateurs plans (C_1 et C_2) sont formés par les deux armatures fixes (a_1 et a_2) et par l'armature mobile (a_0) liée à la masse sismique :



C_1 est la capacité du condensateur formé par les deux armatures a_1 et a_0, et C_2 est la capacité du condensateur formé par a_2 et a_0. La distance entre les deux armatures fixes est égale à 2e et la surface de chacune des armatures est égale à S (l'épaisseur des armatures est négligée). On peut noter que, au repos ($x_m = x_b$), la distance entre les deux armatures des deux condensateurs est égale à e.

Les valeurs numériques communes aux parties A, B et C sont :

$m = 1$ g
$k = 19{,}62\ 10^5$ N/m
$e = 0{,}1$ mm

Partie A.

La mise en équation de la partie mécanique (en isolant la masse sismique) donne l'équation suivante :

$$m\,\frac{d^2x_m}{dt^2} = -k\,.\,(x_m - x_b) - f\,.\,\frac{d(x_m - x_b)}{dt}$$

avec $f = 8{,}86$ kg s^{-1}

A.1. Écrire l'équation différentielle de la variable x en fonction de x_b (on rappelle que $x = x_m - x_b$).

On se place en régime harmonique afin d'utiliser la notion de transmittance entre l'entrée et la sortie d'un système.

A.2. Citer une des conditions portant sur le système permettant de définir une telle notion.

A.3. On note $\overline{X}(j\omega)$ et $\overline{X_b}(j\omega)$ les deux variables complexes correspondant à x(t) et x_b(t) respectivement.

Déterminer la transmittance $\dfrac{\overline{X}(j\omega)}{\overline{X_b}(j\omega)}$.

A.4. L'entrée de ce système est en fait l'accélération γ_b, avec $\gamma_b = \dfrac{d^2x_b}{dt^2}$.

On note $\overline{\Gamma_b}(j\omega)$ la variable correspondant à γ_b(t) en régime harmonique.

Donner la relation entre $\overline{\Gamma_b}(j\omega)$ et $\overline{X_b}(j\omega)$.

A.5. Déterminer la transmittance $\overline{T_A}(j\omega) = \dfrac{\overline{X}(j\omega)}{\overline{\Gamma_b}(j\omega)}$.

Écrire $\overline{T_A}(j\omega)$ sous une forme usuelle, en faisant apparaître un coefficient d'amortissement noté σ, une pulsation propre ω_1 et un gain statique A_o.

Donner l'expression de ces trois paramètres en fonction de f, k et m.

A.6. Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode du gain et de la phase de la transmittance $\overline{T_A}(j\omega)$, puis esquisser les courbes réelles.

A.7. Calculer la valeur numérique x_o de x lorsque l'accélération est constante et égale à $\gamma_{bo} = 9{,}81\ m/s^2$.

A.8. On appelle sensibilité statique d'un capteur le rapport entre la sortie et l'entrée, lorsque cette dernière est constante. Calculer la sensibilité de cette partie du capteur, notée S_m, sans oublier l'unité.

A.9. En fait, le coefficient f est beaucoup plus faible, et sera donc pris égal à 0.

A.9.1. Donner la nouvelle expression de la transmittance $\overline{T_A'}(j\omega) = \dfrac{\overline{X}(j\omega)}{\overline{\Gamma_b}(j\omega)}$, et déterminer la pulsation de résonance mécanique (ω_R) de ce capteur.

A.9.2. L'accélération est de la forme : $\gamma_b(t) = 10\ .\ g\ .\ \sin(\Omega\ t)$

avec g : accélération de la pesanteur ($9{,}81\ m/s^2$)

$\Omega = 10$ rd/s

Déterminer l'expression de x(t).

Partie B.

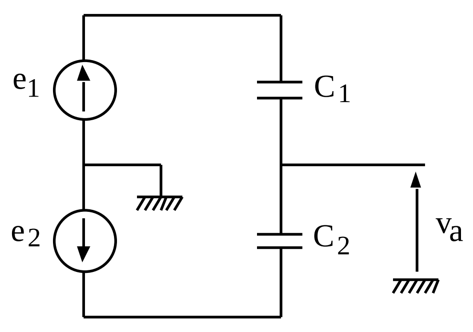
L'objectif de ce paragraphe est de construire le signal $v_m(t)$ à partir de la position x(t).

B.1. On rappelle que la capacité (C) d'un condensateur plan formé de deux armatures de surface S et distantes de d est égale à

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$ ε étant la permittivité du milieu.

Déterminer l'expression des deux condensateurs C_1 et C_2 en fonction de ε, S, e et x.

B.2. La première partie de l'électronique de ce capteur est donnée par le schéma suivant :



e_1 et e_2 sont deux générateurs de tension sinusoïdale (attention à leur sens).

B.2.1. En utilisant la notation complexe correspondant au régime harmonique, déterminer $\overline{V_a}(j\omega)$ en fonction de $\overline{E_1}(j\omega)$ et $\overline{E_2}(j\omega)$, et bien sûr de C_1 et C_2.

On donne $e_1(t) = E \sin(\omega_0 t)$ et $e_2(t) = E \sin(\omega_0 t + \pi)$, avec E = 10 V et ω_0 une pulsation constante.

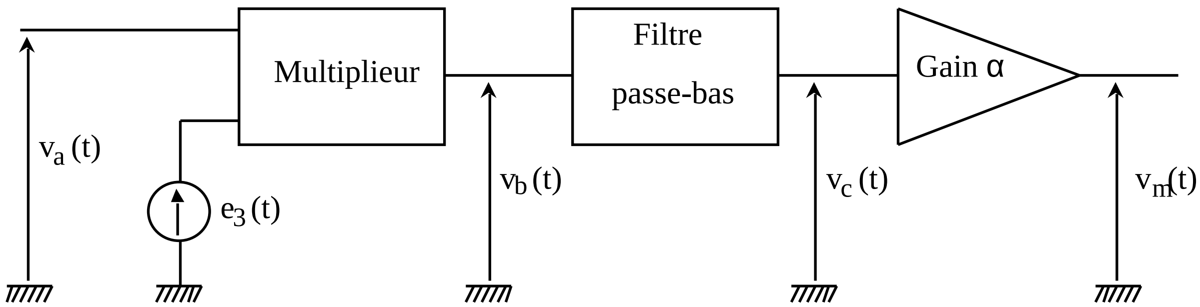
B.2.2. En déduire l'expression de $v_a(t)$, toujours en fonction de C_1 et C_2.

B.2.3. En utilisant les expressions de C_1 et C_2 calculées à la question B.1., déterminer l'expression de la tension $v_a(t)$ en fonction de E, x et e. Mettre cette expression sous forme d'un signal sinusoïdal de pulsation ω_0 en précisant bien l'amplitude de ce signal.

B.2.4. On a $x(t) = X_m \sin(\Omega\, t)$, avec $\Omega << \omega_0$. Calculer $v_a(t)$ et esquisser son chronogramme.

B.3. La deuxième partie de l'électronique permet de construire le signal $v_m(t)$, c'est à dire la tension de mesure, à partir de $v_a(t)$.

Le principe est donné par le schéma synoptique suivant :



On a $$e_3(t) = E \sin(\omega_0 t + \phi)$$
$$v_b(t) = \frac{v_a(t)\,.\,e_3(t)}{E}$$

Le filtre passe-bas est considéré comme étant idéal, de pulsation de coupure égale à ω_0. Le dernier étage est un amplificateur de gain α.

On prendra l'expression de $v_a(t)$ trouvée à la question B.2.3.

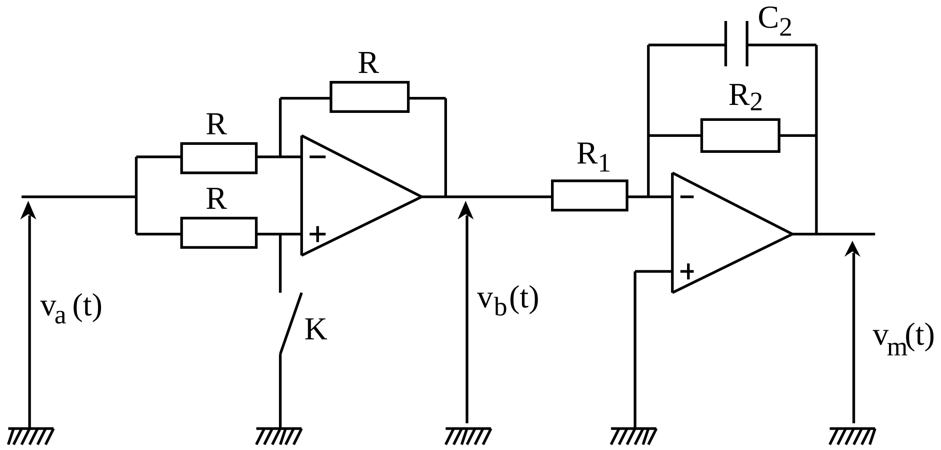
B.3.1. Donner l'expression de $v_b(t)$, mise sous forme d'une somme de deux termes.

B.3.2. En déduire la tension $v_c(t)$. Quelle est la valeur de ϕ permettant d'obtenir la tension la plus grande, autrement dit une sensibilité du capteur la plus élevée possible ?

Cette valeur sera conservée pour la question suivante.

B.3.3. On a $\alpha = 40$. Déterminer $v_m(t)$ en fonction de x(t), et en déduire la sensibilité, notée S_e, de cette partie du capteur.

B.4. Une solution pour réaliser cette deuxième partie du capteur est la suivante :

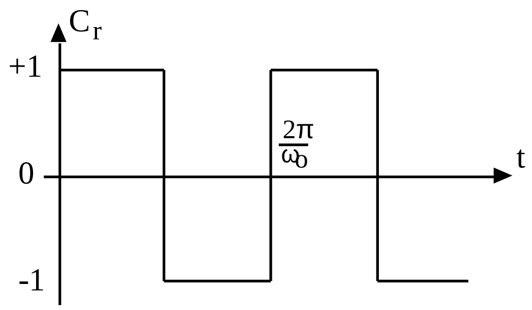


Une tension $e_3(t) = E \sin(\omega_0 t)$ est générée pour commander l'interrupteur K : il est ouvert lorsque la tension $e_3(t)$ est positive, et fermé lorsqu'elle est négative. Les amplificateurs linéaires intégrés (amplificateurs opérationnels) sont considérés comme parfaits.
On supposera que ce montage n'influence pas le fonctionnement de la première partie, autrement dit que la tension $v_a(t)$ est toujours celle trouvée à la question B.2.3.

B.4.1. Calculer v_b en fonction de v_a lorsque l'interrupteur est fermé.

B.4.2. Même question, mais lorsque l'interrupteur est ouvert.

Soit le signal périodique suivant, noté $C_r(t)$, de même pulsation ω_0 que $e_3(t)$ et sans dimension :



B.4.3. A l'aide des deux questions précédentes, déterminer $v_b(t)$ en fonction de $v_a(t)$ et de $C_r(t)$. Quel est le "lien" entre $C_r(t)$ et $e_3(t)$?

B.4.4. On rappelle le développement en série de Fourier de $C_r(t)$:

$$C_r(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin[(2k+1)\,\omega_0 t]$$

Remplacer $v_a(t)$ par son expression en fonction de x(t) et $C_r(t)$ par son développement en série.

x(t) est considéré comme constant et égal à x_o pour le reste du paragraphe B.4.

B.4.5. Donner alors l'expression de $v_b(t)$ en ne prenant en compte que le terme constant et le premier harmonique, c'est à dire le terme dont la fréquence est la plus faible.

B.4.6. Calculer la transmittance $\dfrac{\overline{V_m}(j\omega)}{\overline{V_b}(j\omega)}$ en la mettant sous une forme usuelle. Donner l'expression de son gain statique (noté H_o) et de sa pulsation de coupure à -3 dB (notée ω_2) en fonction des éléments du montage R_1, R_2 et C_2.

B.4.7. On désire que le terme harmonique trouvé dans le signal $v_b(t)$ à la question B.4.5. ne corresponde plus qu'à 0,1% du terme constant dans le signal $v_m(t)$. Calculer alors la valeur de la pulsation ω_2 en fonction de ω_0.

Partie C.

Il s'agit de regrouper les résultats des parties A et B, en considérant la réalisation étudiée dans B.4.

On supposera dans cette partie que la fréquence des variations de l'accélération subie par le capteur est suffisamment faible pour que les transmittances de la partie mécanique et du filtre étudié à la question B.4. se réduisent à leur gain statique.

C.1. Rappeler alors l'expression donnant x(t) en fonction de $\gamma_b(t)$ (issue de la partie A).

C.2. Déterminer l'expression de $v_m(t)$ en fonction de x(t) (issue de la partie B).

C.3. En déduire $v_m(t)$ en fonction de $\gamma_b(t)$.

Donner l'expression de la sensibilité de ce capteur (notée S). Quelle est son unité ?

C.4. On rappelle les valeurs numériques suivantes :

m = 1 g	E = 10 V
k = 19,62 10^5 N/m	e = 0,1 mm

On désire une sensibilité égale à 10 mV/g, c'est à dire 10 mV par g d'accélération (g étant l'accélération de la pesanteur égale à 9,81 m/s^2).

C.4.1. Calculer alors le rapport $\dfrac{R_2}{R_1}$.

C.4.2. En utilisant la relation trouvée à la question B.4.7., avec C_2 = 10 nF et $\omega_0 = 2\pi\,10^5$ rd/s, calculer R_1 et R_2.

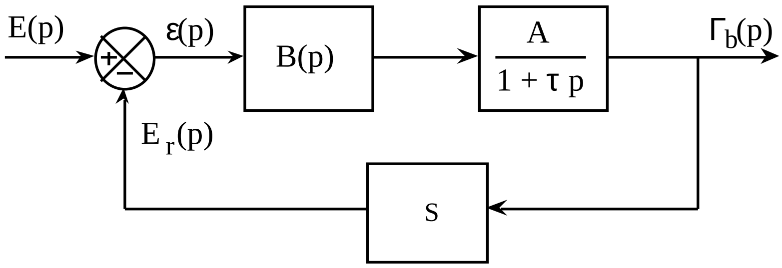
Partie D.

On dispose donc d'un capteur d'accélération de sensibilité S égale à $\frac{10}{g}\,10^{-3}$ V/m/s^2, g étant l'accélération de la pesanteur égale à 9,81 m/s^2.

Ce capteur est utilisé dans la chaîne de retour d'un système asservi dont l'objectif est de contrôler l'accélération d'un plateau sur lequel est fixé le capteur. Le moteur permettant la création du mouvement de ce plateau ne sera pas étudié, mais sera connu par l'intermédiaire de sa fonction de transfert.

Le formalisme de Laplace sera utilisé dans cette partie, $\Gamma_b(p)$ étant par exemple la transformée de Laplace de l'accélération $\gamma_b(t)$.

Le système asservi étudié est le suivant :



avec $A = 100.g$ m/s^2/V

$\tau = 0{,}2$ s

e(t) (E(p)) est la tension de consigne de cet asservissement.

D.1. B(p) =1.

On applique à l'entrée un échelon d'amplitude E_o égale à 0,2V.

D.1.1. Calculer la valeur de l'accélération en régime permanent.

D.1.2. On voudrait une accélération égale à 20g. Quelle doit être la tension de consigne ?

D.1.3. La tension de consigne prend la forme suivante :

$e(t) = 0{,}2 \cdot \sin(\Omega t)$ avec $\Omega = 10$ rd/s

Déterminer $\gamma_b(t)$ en régime permanent, en précisant l'amplitude et la phase.

D.2. On prend maintenant $B(p) = \frac{1}{p}$.

D.2.1. Calculer l'accélération en régime permanent suite à un échelon de consigne d'amplitude 0,2 V.

D.2.2. La tension de consigne est maintenant $e(t) = 0{,}2 \cdot \sin(\Omega t)$, avec $\Omega = 0{,}01$ rd/s. Donner, sans calcul, l'expression de $\gamma_b(t)$.